

Канторовская диагонализация и планирование

Аллин Коттрел, Пол Кокшотт, Грэг Микаэльсон

5 января, 2007

Перевод: Марков С., 2010

Резюме

В одной из своих недавних работ Мерфи (2006) [9] утверждает, что можно использовать диагональный аргумент Кантора¹, чтобы пролить свет на вопросы, которые возникли в дискуссии 30-х годов о социалистическом экономическом вычислении. В этой статье мы покажем, что в аргументации Мерфи наличествуют заметные просчеты, как с точки зрения теории чисел, так и с точки зрения хозяйственных реалий.

1. Действительно ли число цен бесконечно?

Мерфи резюмирует свои доводы следующим образом:

... если бы социалистические плановики действительно решили имитировать действие рыночных механизмов, они должны были бы издать список, содержащий не просто огромное количество цен и не просто бесконечное количество цен, а скорее список, содержащий неисчислимо бесконечное количество цен. Однако, как было продемонстрировано выше, социалистические плановики не могут издать такой список даже в принципе. Таким образом, даже если бы мы предоставили им бесконечно большой лист бумаги и дали бы им бесконечное количество времени, они, тем не менее, даже в теории не смогли бы записать весь набор «бухгалтерских цен», который потребовался бы их управленцам для обмена производственными ресурсами. Поэтому предполагаемое математическое решение задачи Мизеса невозможно во всех смыслах этого слова.

Почему список необходимых бухгалтерских цен бесконечен? Мерфи обосновывает это следующим образом: «каждый мыслимый продукт или услуга, которые могут быть предложены, должны иметь соответствующую цену в списке планирующей инстанции». Этот список, как утверждается, должен включать в себя продукты и услуги, которые в настоящее время не производятся — такие, например, как уикенд на Марсе, который может стать возможным с применением технологий будущего. Множество продуктов и услуг, которые необходимо будет включить в список, должно содержать в себе каждую книгу, которая может быть написана в будущем. На основе вышесказанного Мерфи утверждает, что Хайек (1955) [5] чрезвычайно недооценил количество уравнений требуемых для реализации на практике математического решения проблемы планирования.

Так как вычисление для бесконечного пространства в принципе невозможно, Мерфи делает вывод, что подготовка социалистического плана не просто сложна, а невозможна в принципе.

Аргументы относительно исчислимости в экономике весьма своеобразны. Они часто в большей мере раскрывают аксиоматические основы экономических теорий, чем объясняют действие реально существующих мировых хозяйств. Эрроу и Дебрю (1954) [1], например, по мнению многих, установили существование точки равновесия для

¹ Георг Кантор (нем. Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor) — немецкий математик, один из создателей современной теории чисел

конкурентных экономических систем, но, как показал Велупиллаи (2003) [13], их доказательство основывалось на теоремах, которые верны только в неконструктивной математике.

Почему имеет значение, основывается ли Эрроу на конструктивной или на неконструктивной математике?

Потому что только конструктивная математика имеет алгоритмическую реализацию и гарантирует эффективную вычислимость. Даже если

1. может быть доказано существование механического экономического равновесия,
2. можно показать, что существует эффективная процедура, при помощи которой оно может быть найдено: то есть, хотя равновесие в принципе вычислимо, все еще сохраняется вопрос о практической применимости найденной вычислительной процедуры. Каким порядком сложности обладает найденный процесс вычисления?

Предположим, что равновесие существует, но все алгоритмы его нахождения относятся к классу NP -полных, то есть, время вычисления для этих алгоритмов экспоненциально зависит от размерности задачи. Именно это показали Денг и Хуанг (2006) [3]. Их результат, на первый взгляд, поддерживает утверждение австрийской экономической школы о том, что задача рационального экономического планирования неразрешима в вычислительном плане. Во времена Хэйека понятие NP -полноты не было известно, но его утверждение сегодня кажется ретроспективно доказанным. Задачи с вычислительными затратами растущими как $O(e^n)$ быстро становятся астрономически сложными для решения.

Астрономическими в буквальном смысле этого слова. Можно легко определить NP -полную задачу, которая для получения определенного ответа потребует перебора большего количества вариантов, чем есть атомов во всей вселенной. Такие задачи, хотя в принципе являются конечными, находятся вне рамок любого практически применимого решения.

Однако, это обоюдоострый аргумент. С одной стороны, он показывает, что не может существовать планирующего компьютера, способного решить неоклассическую проблему экономического равновесия. Но, с другой стороны, он же говорит о том, что никакое сообщество миллионов людей, взаимодействующих посредством рынка, также не может решить эту проблему. В неоклассической экономике число ограничений, накладываемых на точку равновесия, будет пропорционально, среди прочего, числу экономических субъектов n . Вычислительный ресурс, предоставленный субъектами, будет пропорционален n , но затраты на вычисление будут расти как e^n . Вычислительные ресурсы растут линейно, потому что они пропорциональны числу людей, принимающих решения, вычислительные затраты растут по экспоненте. Это означает, что у рыночной экономики никогда не могло быть достаточных вычислительных ресурсов для нахождения собственного механического равновесия.

Должны ли мы сделать из этого вывод, что рыночная экономика невозможна?

Очевидно, что нет, поскольку у нас есть эмпирическое доказательство того, что она существует. Следовательно, проблема нахождения неоклассического равновесия является миражом. Равновесие не может быть найдено ни планирующей системой, ни рынком. Неоклассическая проблема равновесия неверно описывает то, что капиталистические экономические системы делают в действительности, а также устанавливает невозможную цель для социалистического планирования.

Если отказаться от понятия механического равновесия и заменить его статистическим равновесием, мы перейдем к задаче, более пригодной для решения. Моделирование Райта (2003, 2005) [15] [16], Драгулеску и Яковенко (2000) [4] показали, что рыночная экономика быстро сходится к этому виду равновесия. Причина этого в том, что задача регулирования на основе закона стоимости практически разрешима с вычислительной точки зрения (что и сделало возможным подобное моделирование). Вычислимость этой задачи на практике может быть использована в социалистической

системе планирования. Мы покажем, что экономическое планирование не должно решать неразрешимую проблему неоклассического равновесия, оно просто должно применять классический закон стоимости более эффективным образом.

В своей статье Мерфи утверждает, что пространство задачи экономического вычисления не просто NP -полное, а фактически трансфинитное. Если область задачи фактически бесконечна, то как рыночная экономика может обеспечить нахождение эффективного решения? Никакой конечный вычислительный ресурс, будь то государственные плановые институты с компьютерами или капиталистические супермаркеты и оптовики с их компьютерами и базами данных, не может осуществить поиск в бесконечной области. В этом случае или рынок должен также быть несовершенным, в соответствии с критериями Мерфи, или же эти критерии неуместны. Мерфи требует невозможного: обратной передачи информации во времени. Он требует, чтобы сегодняшняя экономическая система принимала во внимание информацию, которая может существовать только в будущем: информацию о продуктах, которые будут однажды изобретены. Никакая система, капиталистическая ли или социалистическая, не может сделать это. Экономические системы могут только распределять ресурсы между продуктами, изобретение которых или прогнозируется, или уже осуществлено.

Что побуждает автора выдвигать очевидно причудливое требование к социалистическим плановикам о необходимости вычисления цен для всех предметов потребления в настоящем и будущем?

Его идея состоит в том, что только при этом условии плановики могут утверждать, что система подобная системе Ланге/Дикинсона [8] (построенная под впечатлением от неоклассической беллетристики Вальраса с его аукционистом) является «совершенной» заменой рыночного механизма в отношении проблемы инноваций.

В этом есть малая толика смысла, хотя и выраженного в извращенной форме. Постоянной темой австрийской экономики является то, что неоклассическое представление рыночной системы, с его акцентом на эффективности статического распределения, вводит в заблуждение и в некотором смысле представляет капитализм в менее выгодном свете.

Основное достоинство капитализма, согласно австрийцам, не в том, что он достигает оптимального по эффективности, идеально конкурентоспособного равновесия цен, равного предельным издержкам, а в том, что капитализм порождает эффективный процесс открытий и инноваций — полностью «предпринимательский» по сути.

Если экономическая система должна была бы поручить процесс по созданию новых продуктов и процессов полностью и исключительно механизму, в котором менеджеры принимают решения о том, что произвести, и как произвести, на основании учета отношений цен, тогда в некотором смысле автор прав: «данные относительные цены» должны были бы включать цены всех вещей, которые могли бы быть произведены так же, как и вещей, которые в настоящее время производятся.

Наш ответ основан на двух замечаниях. Во-первых, исторически, схема Ланге/Дикинсона не предлагалась в качестве решения проблемы инноваций: первоначально фон Мизесом (1935) [14] была сформулирована совершенно иная проблема. Во-вторых, рыночное решение проблемы инноваций не ограничивается простыми пассивными ответами на ценовые сигналы; точно так же социалистическая экономика не будет решать проблему инноваций через пассивные ответы на вычисленные цены (или трудовые стоимости) не существующие в настоящее время продукты и услуги.

В любой системе должен быть механизм для исследования вариантов «в окрестности» текущей матрицы затраты-выпуск², при этом горизонт такого исследования определяется научными достижениями (или, в некоторых случаях, только скачками воображения). Это неизбежно требует использования экспериментов, метода проб и

2 Матрица затраты-выпуск — квадратная матрица, каждый элемент которой M_{ij} показывает количество продукта i используемого при производстве продукта j .

ошибок и так далее. Эта задача лежит вне области действия механизма Ланге/Дикинсона так же, как и вне области «стандартного» процесса рыночной балансировки (перемещения капитала из областей с низкой прибыльностью вложений в области с высокой прибыльностью). Создание эффективного механизма для решения этой задачи нетривиально. В работе Кокшотта и Коттрелла (1992) [2] обсуждается этот вопрос и предполагается, что необходим некоторый согласованный ежегодный инновационный бюджет; также, возможно, хорошей идеей является наличие более чем одного агентства, занимающегося распределением ресурсов для инновационных экспериментов — но этот вопрос требует более тщательного анализа. Делать ставку на технический прогресс в области новых продуктов, необходимых людям, или в области новых процессов, более эффективных, чем старые, это не вопрос, требующий простого выбора «социализм или капитализм». Капиталистические хозяйства весьма существенно различались по степени своей эффективности в этом отношении, и этого же, по-видимому, следует ожидать и от социалистических хозяйств.

Если мы предполагаем, что социалистическая экономика сохраняет некоторую форму рынка для товаров народного потребления, как предлагал Ланге, для сбора информации о конечных потребностях, тогда процесс получения уравновешенного плана может быть реализован на практике.

Давайте возьмем очень простой пример, экономику с 4 типами товаров, которые мы назовем хлебом, зерном, углем и железом. При производстве угля потребляются железо и уголь. Чтобы поддерживать жизнь, необходимо зерно для производства муки и уголь, чтобы испечь хлеб. Чтобы вырастить зерно, требуются железные инструменты и некоторое количество зерна на семена. Создание железа требует угля и железных орудий. Мы можем описать это в виде четырех процессов:

- 1 тонна железа ← 0.05 тонны железа + 2 тонны угля + 20 рабочих дней;
- 1 тонна угля ← 0.2 тонны угля + 0.1 тонны железа + 3 рабочих дней;
- 1 тонна зерна ← 0.1 тонны зерна + 0.02 тонны железа + 10 рабочих дней;
- 1 тонна хлеба ← 1.5 тонны зерна + 0.5 тонны угля + 1 рабочий день.

Предположим, вслед за Ланге (1938) [8], что плановые инстанции имеют текущую оценку потребительского спроса на конечную продукцию. Плановики начинают с требуемых объемов чистой продукции. Это показано в первой строке таблицы 1. Мы предполагаем, что требуется 20000 тонн угля и 1000 тонн хлеба.

Таблица 1: Схождение объемов суммарного производства необходимого для производства заданных объемов конечной продукции

Железо	Уголь	Зерно	Хлеб	Труд	
0	20000	0	1000	0	Чистая продукция
2000	24500	1500	1000	61000	1-я оценка суммарной потребности
2580	29400	1650	1000	129500	
3102	31540	1665	1000	157300	
3342	33012	1666	1000	174310	
...	Скрытые шаги
3708	34895	1667	1000	196510	
3708	34895	1667	1000	196515	

Плановики оценивают, какое количество железа, зерна, угля и труда были бы непосредственно потреблены в производстве конечной продукции: 2000 тонн железа, 1500 тонн зерна и 4500 дополнительных тонн угля.

Они добавляют промежуточные затраты к чистой продукции, чтобы получить первую приблизительную оценку использования продуктов. Поскольку эта оценка говорит о необходимости производства большего количества железа, угля и зерна, чем предполагалось первоначально, плановики повторяют вычисление, чтобы получить вторую приблизительную оценку использования продуктов. Ответы, полученные на каждой итерации, отличаются друг от друга, но раз от раза различия между последовательно получаемыми ответами сокращаются. В конечном счете (предполагая использование целых величин для учета количества), после 20 итераций в этом примере, плановики получают согласованный результат: если население должно потребить 20000 тонн угля и 1000 тонн хлеба, тогда суммарное производство железа должно составить 3708 тонн, угля должно быть 34896 тонн, а зерна — 1667 тонн.

Можно ли отмасштабировать это решение для числа товаров, производимых в реальной экономике?

В 1930-е при ручном расчете такие вычисления были бы крайне утомительны, но теперь они могут быть легко автоматизированы. Таблица 1 была создана с использованием компьютерного алгоритма. Если детализированное планирование осуществимо, мы должны знать:

1. Сколько типов продуктов производит экономика.
2. Сколько типов продуктов потребляется в производстве каждого вида продукции.
3. Как долго будет выполняться компьютерная программа, реализующая алгоритм планирования, для масштаба данных соответствующего (1) и (2).

Таблица 2 иллюстрирует результаты запуска программы, реализующей алгоритм планирования, на дешевом персональном компьютере 2004 года выпуска. Мы определили время вычисления для экономических систем, в которых число продуктов колебалось от одной тысячи до миллиона. Два различных предположения были проверены в отношении зависимости среднего количества типов продуктов, потребляемых в производстве каждого вида продукции (т.н. «входов»), от сложности экономики.

Ясно, что число входов является лишь крошечной долей всего диапазона продуктов, производимых в экономике. Также вероятно, что по мере роста сложности индустрии, среднее число входов также будет расти, но существенно медленнее. В первой части таблицы 2 предполагается, что среднее число входов (M) растет как квадратный корень количества видов продукции (N).

Во второй части таблицы рост M предполагается по логарифмическому закону.

Следует отметить, что время вычисления весьма невелико даже для очень больших экономических моделей. Решение задачи с миллионом уравнений под силу даже скромному домашнему компьютеру. Ограничивающий фактор в экспериментах — объем машинной памяти. Наибольшая из проверенных моделей потребовала 1.5 Гб памяти. Большие модели потребовали бы использования более продвинутого 64-битного компьютера.

Таблица 2: Временные затраты при использовании алгоритма планирования для моделей экономических систем различных размеров. Замеры времени были выполнены на Intel Xeon 3Ghz под управлением Linux и оснащенный 2 Гб памяти.

	Продукты (N)	Среднее число	Процессорное	Используемый
--	------------------	---------------	--------------	--------------

		входов (M)	время, с	объем памяти
$M = \sqrt{N}$ Случай	1000	30	0,1	150 Кб
	10000	100	3,8	5 Мб
	40000	200	33,8	64 Мб
	160000	400	77,1	512 Мб
	320000	600	166,0	1,5 Гб
$M \approx \log N$ Случай	1000	30	0,1	150 Кб
	10000	40	1,6	2,4 Мб
	100000	50	5,8	40 Мб
	1000000	60	68,2	480 Мб

Эксперимент проводился для системы из одного миллиона продуктов. Число индустриальных продуктов в советской экономике было оценено Ноувом (1983) [10] примерно в 10 миллионов. Ноув полагал, что это число столь огромно, что делает совершенно невозможным создание неагрегированного уравновешенного плана. Это, возможно, было верно при использовании компьютерных технологий, доступных в 1970-е, но сегодня ситуация существенно изменилась.

2. Является ли количество цен неисчислимо бесконечным?

Мерфи утверждает, что диагональный аргумент Кантора можно использовать для того, чтобы показать существование неисчислимо бесконечного числа цен. Но в действительности не делает этого. Скорее он объясняет диагонализацию, а затем утверждает, что она применима к предполагаемой бесконечности числа цен без демонстрации этого на практике. Тем не менее, давайте, не смотря на отсутствие аргументации, предположим, что существует бесконечное множество цен и исследуем его мощность.

Аргумент Кантора может быть кратко формулирован следующим образом. Мы можем пронумеровать (то есть перечислить или записать), все целые числа, начиная с 1 и так далее прибавляя по единице:

1
2
3
...

Мы можем также пронумеровать все рациональные числа, то есть числа, являющиеся отношениями целых чисел.

1/2
2/1
2/2
1/3

2/3
3/3
3/2
3/1
...

Заметим, что многие рациональные числа в этом списке повторяются. Например, 1 это 1/1 и 2/2 и 3/3 и т.д. Заметим также, что мощность множества (то есть «тип бесконечности», говорящий о том насколько она велика) рациональных чисел такая же, как и у множества целых чисел, поскольку мы можем сопоставить каждому рациональному числу — целое:

1 — 1/1
2 — 1/2
3 — 2/1
4 — 2/2
5 — 1/3
...

Другими словами, рациональных чисел так же много, как и целых. Мы говорим, что множество рациональных чисел — *исчислимо*.

Важно отметить, каждое целое и каждое рациональное число имеет конечное представление, даже притом, что у некоторых рациональных дробей есть бесконечные представления. Например, если мы попробуем записать 1/3 в виде десятичной дроби, мы получим 0,33333... с бесконечным количеством троек после запятой. Тем не менее, 1/3 — подходящее конечное представление этой величины.

Кантор предложил диагонализацию для того, чтобы показать, что множество действительных чисел, то есть чисел, состоящих из целого числа, сопровождаемого произвольным числом десятичных разрядов после запятой, содержит большее количество элементов, чем множества рациональных и целых чисел. Основываясь на подходе Клини (1952) [7], мы возьмем все действительные числа между 0 и 1, и представим их в виде десятичных дробей с бесконечным числом знаков после запятой. Каждое число, последний дробный разряд которого равен 0, заменим формой с бесконечным числом девяток (например, $0,5 \rightarrow 0,499999\dots$). Теперь предположим, что существует перечисление действительных чисел $x_1 x_2 x_3 \dots$ между 0 и 1. Предположим, что запись числа x_i состоит из десятичных цифр $x_{i1} x_{i2} x_{i3}$ и так далее. Тогда мы можем записать последовательность десятичных дробей следующим образом:

$0.x_{11} x_{12} x_{13} \dots$
 $0.x_{21} x_{22} x_{23} \dots$
 $0.x_{31} x_{32} x_{33} \dots$
...

Теперь построим новую десятичную дробь x' таким образом, чтобы x'_1 отличалось от x_{11} , x'_2 отличалось от x_{22} , x'_3 отличалось от x_{33} и так далее так, чтобы вообще x'_i отличалось от x_{ii} . Таким образом, x' отличается от всех перечисленных нами действительных чисел из диапазона между 0 и 1. Из этого мы заключаем, что мощность множества действительных чисел выше мощности множества целых и рациональных чисел; иными словами, множество действительных чисел неисчислимо.

Теперь можно легко продемонстрировать, что этот аргумент неприменим к ценам. Прежде всего, цены за единицу продукта могут быть представлены только числами с

конечным числом десятичных разрядов, так как все денежные системы основаны на целых количествах наименьших денежных единиц. Мы могли бы утверждать, что желаем использовать произвольные доли цен, например, при продаже произвольных пропорций килограмма сыра. Игнорируя физические ограничения, накладываемые на измерения, которые гарантируют, что на микроскопическом уровне мы можем различить только дискретные количества вещей, все доли являются отношениями целых чисел, то есть рациональными числами и, следовательно, исчислимы. Таким образом, любая попытка применить диагонализацию будет с необходимостью производить значения, которые могут быть перечислены. Наконец, нас интересуют не цены как таковые, а цены продуктов. Поскольку число различных продуктов гарантированно исчислимо, то исчислимо и количество соответствующих цен.

Ссылки

1. Arrow, K. and Debreu, G.: 1954, Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy, *Econometrica* 22(3), 265—290.
2. Cottrell, A. и Cockshott, P.: 1992, *Towards a New Socialism*, Vol. Nottingham, Bertrand Russell Press. (Русский перевод: <http://www.left.ru/2006/7/tns.phtml>)
3. Deng, X. and Huang, L.: 2006, On the complexity of market equilibria with maximum social welfare, *Information Processing Letters* 97(1), 4—11.
4. Dragulescu, A. и Yakovenko, V. M.: 2000, Statistical mechanics of money, *The European Physical Journal B* 17, 723—729.
5. Hayek, F. A.: 1955, *The Counter-Revolution of Science*, The Free Press, New York.
6. Kieu, T. D.: 2001, Quantum algorithm for Hilbert's tenth problem, CoRR quant-ph/0110136.
7. Kleene, S.: 1952, *Introduction to Metamathematics*, North-Holland.
8. Lange, O.: 1938, *On the Economic Theory of Socialism*, University of Minnesota Press.
9. Murphy, J.: 2006, Cantor's Diagonal Argument: an Extension to the Socialist Calculation Debate, *Quarterly Journal of Austrian Economics* 9(2), 3..11.
10. Nove, A.: 1983, *The Economics of Feasible Socialism*, George Allen and Unwin, London.
11. Smith, W. D.: 2006, Three counterexamples refuting Kieu's plan for «quantum adiabatic hypercomputation» and some uncomputable quantum mechanical tasks, *J.Applied Mathematics and Computation* 187(1), 184—193.
12. Tsirelson, B.: 2001, The quantum algorithm of Kieu does not solve the Hilbert's tenth problem, Technical Report quant-ph/0111009, arXiv.org.
13. Velupillai, K.: 2003, *Essays on Computable Economics, Methodology and the Philosophy of Science*, Technical report, Universita' Degli Studi di Trento — Dipartimento Di Economia.
14. von Mises, L.: 1935, Economic calculation in the socialist commonwealth, in F. A. Hayek (ed.), *Collectivist Economic Planning*, Routledge and Kegan Paul, London.
15. Wright, I.: 2003, Simulating the law of value, Submitted for publication, preprint at http://www.unifr.ch/econophysics/articoli/_chier/WrightLawOfValue.pdf.
16. Wright, I.: 2005, The social architecture of capitalism, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 346(3-4), 589—620.